

1

Вещественные числа и правила их сравнения. Теорема о существовании ТВГ (ТНГ) у ограниченного сверху (снизу) множества вещественных чисел

Рациональным называется число, представимое в виде отношения двух целых чисел.

Свойства для $a, b, c \in \mathbb{Q}$:

- Любые два числа $a, b \in \mathbb{Q}$ связаны ровно одним среди знаков $<, >, =$, причем если $a < b$, то $b > a$.
- Существует правило, ставящее в соответствие любым числам $a, b \in \mathbb{Q}$ число c , называемое их **суммой** и обозначаемое $c = a + b$.
- Существует правило, ставящее в соответствие любым числам $a, b \in \mathbb{Q}$ число c , называемое их **произведением** и обозначаемое $c = ab$.
- Правило упорядочения:** если $a > b$ и $b > c \rightarrow a > c$ (свойство транзитивности знака $>$); из $a = b$ и $b = c \rightarrow a = c$ (свойство транзитивности знака $=$).
- Св-во коммутативности сложения:** $a + b = b + a$.
- Св-во ассоциативности сложения:** $(a + b) + c = a + (b + c)$.
- Существует число 0 такое, что $a + 0 = a$ для любого числа a (особая роль нуля).
- Для каждого числа a существует число a' такое, что $a + a' = 0$.
- Св-во коммутативности умножения:** $ab = ba$.
- Св-во ассоциативности умножения:** $(ab)c = a(bc)$.
- Существует число 1 такое, что $1 \cdot a = a$ для любого числа a (особая роль единицы).
- Для каждого числа $a \neq 0$, существует обратное ему число a' такое, что $a \cdot a' = 1$.
- Свойство дистрибутивности операции умножения относительно суммы:** $(a + b)c = ac + bc$.
- Из $a > b$ вытекает $a + c > b + c$ для любых a, b, c .
- Из $a > b$ и $c > 0$ следует $ac > bc$.
- Аксиома Архимеда:** Каково бы ни было число a , можно число 1 повторить слагаемым столько раз, что сумма превзойдет a .

Каждому рациональному числу соответствует определенная точка на числовой оси, но не каждой точке можно сопоставить рациональное число. [Если выбрать точку M такой, чтобы длина отрезка OM равнялась диагонали квадрата со стороной OE (длина масштабного отрезка), то по теореме Пифагора эта длина x отрезка OM является корнем уравнения $x^2 = 2$ и это — иррациональное число.]

Докажем, что посредством измерения отрезка OM каждой точки оси можно поставить в соответствие **бесконечную десятичную дробь**. Выберем на оси начало отсчета (O) и масштабный отрезок $|OM| = 1$. Пусть A — произвольная точка на прямой. Отрезок OM укладывается в отрезке OA :

- Целое число раз a_0 без остатка. Тогда поставим т. A в соответствии бесконечную десятичную дробь $a_0,000000\dots$
- Целое число раз a_0 с остатком O_1A , $|O_1A| < |OM|$. Тогда выясним, сколько раз $1/10 OM$ поместится в O_1A .

2.1. Целое число a_1 раз без остатка. Тогда поставим т. A в соответствии бесконечную десятичную дробь $a_0, a_1 000\dots$

2.2. Целое число раз a_1 с остатком O_2A , $|O_2A| < |OM|$. Тогда выясним, сколько раз $1/100 OM$ поместится в O_2A .

И так далее... Таким образом мы поставили в соответствие точке M некоторое конкретное число.

Числа представимые бесконечными десятичными дробями, как положительными так и отрицательными, называются **вещественными**. Для вещественных чисел выполняются те же 16 вышеуказанных свойств, что и для рациональных.

Назовем **модулем** вещественного числа a эту же бесконечную десятичную дробь, взятую со знаком $+$.

Два числа a и b называются **равными**, если они имеют одинаковые знаки и совпадают по разрядам.

При сравнении неравных чисел a и b возможны 3 случая:

- оба числа неотрицательны, в этом случае в силу их неравенства k -й разряд чисел отличен. Тогда между числами a и b стоит такой же знак, что и между числами k -го разряда;
- оба числа отрицательны, тогда рассмотрим их модули (по 1 случаю) и возьмем противоположный знак;
- одно из чисел отрицательно, а второе — неотрицательно, тогда первое всегда меньше второго.

Множество вещественных чисел $\{x\}$ **ограничено сверху**, если $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \{x\}: x \leq M$. При этом число M называется **верхней гранью** мн-ва $\{x\}$.

Наименьшая из всех верхних граней ограниченного сверху мн-ва $\{x\}$ называется **точной верхней гранью** этого множества. Обозначение: $\sup\{x\}$.

1) $\forall x \in \{x\}, x \leq \bar{x}$, 2) $\forall x' \in \mathbb{R}; x' < \bar{x}, \exists x \in \{x\}$, т. ч. $x > x'$
или 1) $\forall x \in \{x\}, x \leq \bar{x}$, 2) $\forall \varepsilon > 0 \exists x \in \{x\}$, т. ч. $x > \bar{x} - \varepsilon$

Теорема. Если множество $\{x\}$ непустое и ограничено сверху, то у него существует ТВГ.

Доказательство: рассмотреть два случая — когда среди элементов множества есть хотя бы одно неотрицательное вещественное число, и когда все элементы отрицательны. В первом случае отбрасываются все отрицательные числа и рассматриваются оставшиеся неотрицательные. Далее среди элементов мн-ва выбирается наибольшая целая часть a_0 (такой элемент найдется, т. к. мн-во ограничено сверху). Среди всех элементов с такой целой частью выбирается элемент с наибольшим первым десятичным знаком после запятой (a_1). Продолжая аналогичные рассуждения мы получим число a , которое удовлетворяет определению точной верхней грани. Первый случай доказан, во втором случае все аналогично за исключением того, что брать надо наименьшие из десятичных знаков. ■

Лемма¹ $\mathbb{Q} \leq \mathbb{R} \leq \mathbb{Q}$. Любое вещественное число можно заключить между двумя рациональными со сколь угодно малой разницей.

Утверждение. Любое вещественное число можно с наперед заданной точностью приблизить рациональными числами.

Доказательство: рассмотрим неотрицательное вещественное число a . Обрывая его дробное представление на $-m$ знаке после запятой, мы получим рациональное число, не большее a . Увеличив его последний ненулевой десятичный знак на единицу (с переносом, если это нужно), получим второе рациональное число, не меньшее a . Таким образом, для любого номера n есть два ограничивающие его рациональных числа такие, что они отличаются на 10^{-n} . ■

Тогда справедлива **лемма 1**, где малое $\varepsilon = 10^{-n}$.

Лемма² $\mathbb{R} \leq \mathbb{Q} < \mathbb{Q} \leq \mathbb{R}$. Для любых двух вещественных чисел найдется такое рациональное число, что оно заключено между ними. Следовательно найдется б/м рациональных чисел между ними.

Доказательство: рассматривается неотрицательный случай. Найдём «скачок» в вещественных числах a и b (то есть тот десятичный знак k , начиная с которого нарушается равенство: a_k и b_k). Далее зафиксируем все следующие нули (если они есть), и первый ненулевой знак большего числа уменьшим на единицу, а дальше допишем девятки. Это число и будет искомым.

Лемма³ о равенстве. Если два вещественных числа можно «зажать» между двумя рациональными (γ_1, γ_2) со сколь угодно малой разницей – числа равны.

Доказательство: от противного: зажимаем два вещественных числа, применяем лемму 2 ($\alpha_2, \alpha_1 \in \mathbb{Q}$), применяем свойство транзитивности знаков $>, =$, откуда следует, что $\varepsilon > \gamma_2 - \gamma_1 > \alpha_2 - \alpha_1$ (! ε наперед заданное $\mathbb{Q}$) ■

Суммой(Произведением) двух вещественных чисел a и b называется такое вещественное число x , что для любых рациональных чисел, ограничивающих a и b , их суммы(произведения) ограничивают x .

Уточненное определение вещественного числа: вещественными называются числа, представимые в виде бесконечных десятичных дробей, при условии, что для них определены вышеуказанным образом операции упорядочения, сложения и умножения.

Теорема о существовании суммы двух вещественных чисел.

Доказательство: Рассматриваем ограниченное множество сумм двух любых рациональных чисел (ограничителей снизу). Находим ТВГ и доказываем, что она и является искомым значением суммы, т.к. удовлетворяет определению (слева, т.к. x – ТВГ $\{\alpha_1 + \beta_1\}$; справа, т.к. $\alpha_2 + \beta_2$ – одна из верхних граней $\{\alpha_1 + \beta_1\}$, а x – ТВГ). ■

Теорема о единственности суммы двух вещественных чисел.

Доказательство: Пусть существует две суммы, рассматриваем сумму из неравенств ограничителей. Возьмём такие ограничители, что разность между ними равна $\varepsilon/2$. Получим, что между ограничителями на сумму разность равна ε , то есть любому произвольному числу. По Лемме 3 суммы равны. ■

Свойства вещественных чисел (не обязательно):

Свойства 1-4 доказаны выше, свойства 5-8(9-13) вытекают из определения суммы(Π) и св-в $\mathbb{Q}$.
Св-во 14° (Из $a > b$ вытекает $a + c > b + c$, $\forall a, b, c$): Составляем тандем из ограничителей (лемма²) и чисел. Обозначим разность верхнего ограничителя a и нижнего ограничителя b меньше ε и ограничим c так, чтобы разность между ограничителями равнялась ε . Далее выписываем тандем из сумм, и используем транзитивность $>$. ■

Множества – совокупность объектов одинаковой природы.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Декартово произведение множества A и B называется множеством $A \times B$ – множеством всех пар (a, b) , таких, что $a \in A, b \in B$.

Отображением множества A в множество B называется подмножество F декартова $\Pi A \times B$, такое, что $\forall a \in A$ существует единственная пара (a, b) множества F . 1) Отображение F называется **сюръекцией** или отображением «на», если для любого элемента множества B существует единственный элемент множества A : $(a, b) \in F$, иначе говоря $F(A) = B$. 2) Отображение F называется **инъекцией** или вложением, если из $a_1 \neq a_2 \Rightarrow F(a_1) \neq F(a_2)$. 3) Отображение F называется **биекцией** или взаимно однозначным соответствием, если оно является одновременно и сюръекцией и инъекцией.

Рассмотрим два множества. Если в одном из них элементов окажется больше, то оно имеет **большую мощность**.

Множества A и B называются **эквивалентными**, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие: $A \sim B$

$$1) \forall a \in A \exists b \in B$$

$$2) \forall b \in B \exists a \in A$$

$$3) \text{ разным } a \in A \text{ соответствуют разные } b \in B$$

Теорема 1. Множества $\{r\} \subset \mathbb{Q}$ и $\{n\} \subset \mathbb{N}$ эквивалентны.

Доказательство: вводится понятие высоты дроби как суммы модуля числителя и значения знаменателя. Далее подряд нумеруются дроби высоты 1, затем высоты 2 и т. д. Таким образом мы установим взаимно однозначное соответствие между множествами $\mathbb{R}$ и $\mathbb{N}$. ■

Множество называется **счетным**, если оно эквивалентно множеству натуральных чисел.

Множество, эквивалентное множеству всех точек отрезка $[0,1]$ называется **множеством мощности континуума**.

Теорема 2. Всякое непустое подмножество счетного множества является или **счетным множеством**, или **имеет конечное число элементов**.

Доказательство: нумеруем множество A , затем нумеруем подмножество A , сопоставляем их. ■

Теорема 3. Множество мощности континуум **несчетно**.

Доказательство: Предположим что ММК счетно и все вещественные числа интервала $[0,1]$ можно занумеровать как $x_i = 0, a_{i1} \dots a_{in}$. Тогда берем число b , не содержащее 9 и 0 в своей десятичной записи, т.ч. $b_n \neq a_{nn}$. Тогда число b не принадлежит классу рациональных чисел, имеет единственное представление и не совпадает ни с одним из x_i . ■

Из теоремы 3 следует, что множество мощности континуума и счетные множества **не являются эквивалентными**.

Последовательностью называется множество занумерованных чисел, которые по некоторому закону ставятся в соответствие натуральным числам.

Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной сверху**, если $\exists M \in \mathbb{R}: \forall n \in \mathbb{N} x_n \leq M$, где M – верхняя грань.

Посл-ть $\{\alpha_n\}$ называется **бесконечно большой**, если $\forall \varepsilon \in \mathbb{R} > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, т. ч. $\forall n \geq N |\alpha_n| > \varepsilon$.

ББП является неограниченной. Обратное не верно:
 $1, 1, 2, \frac{1}{2}, \dots, n, \frac{1}{n}$ – здесь x_{2k} сходится.

Посл-ть $\{\alpha_n\}$ называется **бесконечно малой**, если $\forall \varepsilon \in \mathbb{R} > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, т. ч. $\forall n \geq N |\alpha_n| < \varepsilon$.

БМП+БМП=БМП. Сумма (и разность) двух бесконечно малых последовательностей (БМП) есть БМП.

Доказательство: фиксируем ε , и для обеих последовательностей α и β выбираем такой номер n , чтобы, начиная с этого номера, все элементы были по модулю меньше $\varepsilon/2$. Складываем соответствующие неравенства и получаем $|\alpha_n + \beta_n| < |\alpha_n| + |\beta_n| < \varepsilon$. ■

ОГР×БМП=БМП. Произведение БМП A на *ограниченную* последовательность B есть БМП.

Доказательство: Пусть B ограничена числом M сверху. Фиксируем положительное число ε и записываем определение БМП последовательности B для числа ε/M . Умножаем одно на другое и получаем $|A_n B_n| \leq M |A_n| \leq M(\varepsilon/M) = \varepsilon$. ■

Теорема об ограниченности. Всякая БМП ограничена.

Доказательство: Возьмем в определении БМП $\varepsilon = 1$.

Тогда найдется такой номер последовательности, начиная с которого все элементы $\{\alpha_n\}$ по модулю меньше 1. Обозначим $A = \max(|\alpha_1|, \dots, |\alpha_{n-1}|, 1)$, где $\{\alpha_n\} \leq A$ – по определению огр. посл-ти. ■

Теорема о нуле. Если все элементы БМП с какого-то номера равны *const*, то они равны 0.

Доказательство: от противного: берем в определении БМП $\varepsilon = |c| \neq 0$. ■

Теоремы о обратных последовательностях.

Пусть $\{\alpha_n\}$ – БМП. Тогда $\{x_n\} = \{1/\alpha_n\}$ – ББП.

Пусть $\{\alpha_n\}$ – ББП. Тогда $\{x_n\} = \{1/\alpha_n\}$ – БМП.

Последовательность $\{x_n\}$ называется **сходящейся**, если $\exists a \in \mathbb{R}$, что последовательность $\{x_n - a\}$ является бесконечно малой. Число a называется **пределом** последовательности $\{x_n\}$.

Представление в специальном виде: каждый элемент представляется в виде $x_i = a + \alpha_i$, где a — предел последовательности, а α_i — БМП.

Теорема о единственности предела. СП имеет один предел.

Доказательство: от противного (пусть существуют два предела — a и b), далее представляем в специальном виде и рассматриваем разность БМП из этого вида. Получим, что все элементы полученной БМП равны $a - b = 0$ (по ранее доказанному). Тогда $a = b$. ■

Теорема об ограниченности СП. Всякая СП ограничена.

Доказательство: Пусть a — предел СП. $|x_n - a| < \varepsilon \Rightarrow |x_n| < |a| + 1$. Выбираем в качестве грани наибольшее из чисел $|a| + 1$ и модулей предшествующих $-му$ элементов. Это и будет верхняя грань. ■

Теорема о сумме (разности) СП. Сумма (разность) двух СП сходится к сумме их пределов. ■

Доказательство: Представляем в специальном виде, рассматриваем сумму последовательностей, которая равна сумме (разности) доп. БМП. Остается равенство двух СП и их пределов. ■

Теорема о произведении СП. Произведение двух СП сходится к произведению их пределов.

Доказательство: перемножаем специальные представления, используя ОГР $\times$ БМП=БМП приходим к нужному равенству. ■

Лемма. Если последовательность $\{y_n\}$ сходится к ненулевому пределу a , то, начиная с некоторого номера, определено частное $\{1/y_n\}$, являющееся ограниченной последовательностью.

Доказательство: возьмем $\varepsilon = |a|/2$. Расписывая определение СП, получаем $y_n > |a|/2$, начиная все с того же N . Взяв обратную дробь, получаем условие ограниченности для $\{1/y_n\}$. ■

Теорема о частном СП. Предел частного двух СП (предел второй отличен от 0) равен частному пределов.

Доказательство: будем рассматривать частное начиная с номера N , определенного в лемме. Рассматриваем разность $(x_n/y_n) - (a/b)$. Подставим специальное представление и получаем в правой части ограничение на БМП. ■

Теорема 1. Если все элементы СП $\{x_n\}$ (возможно, начиная с некоторого номера) не меньше (не больше), чем b , то и предел этой последовательности a не меньше (не больше), чем b .

Доказательство: от противного: пусть с N^* выполняется $x_n \geq a$. Делаем предположение, что предел меньше b . Тогда для числа $b-a$ в качестве ε $\exists N$, причем пусть $N \geq N^*$. Тогда $|x_n - a| < b-a$, откуда следует $x_n - a < b - a$ или $x_n < b$ ($x_n \geq a$) (!). ■

Замечание. Соответствующее утверждение для строгих знаков неверно, например для последовательности $\{1/n\}$ — любой элемент больше 0, а предел равен 0.

Следствие 1. Можно делать предельный переход в неравенствах с СП.

Доказательство: $x_n \leq y_n$. Переносим в одну часть, получаем $x_n - y_n \leq 0$. Применяем теорему 1. ■

Следствие 2. Если все элементы СП заключены на отрезке $[a, b]$, то и предел этой последовательности лежит на том же отрезке.

Доказательство: используем теорему 1 для доказательства. ■

Теорема «о двух милиционерах». Если две сходящиеся последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ имеют общий предел a и элементы третьей последовательности $\{z_n\}$ (с некоторого номера) лежат между элементами этих двух, то она сходится к тому же пределу a .

Доказательство: Выберем N^* : $x_n - a < z_n - a < y_n - a$. Тогда $\forall n \geq N^*$: $|z_n - a| \leq \max\{|x_n - a|, |y_n - a|\}$. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и выбираем такое число $N = \max\{N^*, N_1, N_2\}$, с которого сходятся $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$. Подставим условия сходимости в неравенство с модулями и получим, что $|z_n - a| < \varepsilon$. ■

Последовательность называется **неубывающей**, если каждый ее элемент, начиная со второго, не меньше предыдущего.

Последовательность называется **невозрастающей**, если каждый ее элемент, начиная со второго, не больше предыдущего.

Последовательность называется **монотонной**, если она либо **неубывающая**, либо **невозрастающая**.

Теорема о пределе монотонной ограниченной последовательности. Если неубывающая последовательность ограничена сверху, то она сходится.

Доказательство: у этой последовательности существует ТВГ M . Докажем, что M и есть предел этой последовательности. Во-первых, любой элемент не больше M . Фиксируем ε и замечаем, что по определению ТВГ найдется хотя бы один элемент, больший $M - \varepsilon$. Во-вторых, последовательность неубывающая, значит, начиная с этого элемента все элементы x_n находятся на полуинтервале $M - \varepsilon < x_n \leq M$, приведем к $|x_n - M| < \varepsilon$, откуда M — предел последовательности $\{x_n\}$. ■

Замечание. Не всякая сходящаяся последовательность является монотонной. Пример: $1/2, -1/2, 1/3, -1/3, \dots$

Теорема. Последовательность $x_n = (1 + 1/n)^n$ сходится. Предел ее называют числом e .

Доказательство: расписываем бином Ньютона. Доказываем, что $\{x_n\}$ монотонно возрастает ($x_n < x_{n+1}$): оцениваем сверху — заменяем в биномиальном разложении все скобки на 1, а каждый факториал — на соответствующую степень двойки (ибо $k! \geq 2^{k-1}$), применяем формулу геометрической прогрессии. Получим, что любое число из этой последовательности меньше 3. По теореме о сходимости МОП, она сходится и имеет предел, равный e . ■

Можно доказать (отбросив все члены, кроме первого в биномиальном разложении), что e заключено на интервале $(2, 3)$.

Подпоследовательностью (ПП) называется последовательность, составленная из некоторых упорядоченных по номеру элементов данной последовательности.

Утверждение. Если последовательность сходится к a , то и любая ее подпоследовательность сходится к a .

Доказательство: Выбираем ε и соответствующее n , с которого выполняется условие сходимости. Выберем также соответствующий номер из ППи $\{k_n\}$. Так как любой номер ПП $k_n > n$, то если $|x_n - a| < \varepsilon \Rightarrow |x_{k_n} - a| < \varepsilon$. ■

Теорема. Если все ППи последовательности сходятся, то их предел одинаков и равен пределу всей последовательности.

Доказательство: следствие из утверждения 1. ■

Точка называется **предельной точкой (частичным пределом)** последовательности, если в ее δ -окрестности находится бесконечно много элементов этой последовательности **или** если из этой последовательности можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к этой точке.

Наибольшая предельная точка последовательности называется ее **верхним пределом** $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$, а наименьшая — **нижним пределом** $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Теорема о существовании... У всякой ограниченной последовательности существует верхний и нижний предел и, в частности, хотя бы одна предельная точка.

Доказательство: $\{x_n\}$ ограничена, $m \leq x_n \leq M \forall n \in \mathbb{N}$. Обозначим мн-во $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{правее } x \text{ на числовой оси лежит не более, чем конечное число эл-тов посл-ти } \{x_n\}\}$. $A \neq \emptyset$ (т.к. $M \in A$), A ограничено снизу (числом m) $\Rightarrow \exists \bar{x} = \inf A$ - ТНГ мн-ва. Покажем, что $\bar{x} = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Выберем $\varepsilon > 0$. Т.к. $\bar{x}$ - ТНГ, то $\bar{x} - \varepsilon \notin A$, значит правее $\bar{x} - \varepsilon$ лежит б/м элементов $\{x_n\}$ и $\exists x' \in A$, т.ч. $x' < \bar{x} + \varepsilon$. Значит в $(\bar{x} - \varepsilon, x') \subset (\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon)$ лежит б/м элементов мн-ва $\{x_n\}$, т.е. $\bar{x}$ - предельная точка $\{x_n\}$.

Докажем, что не существует числа $\bar{\bar{x}}$, большего $\bar{x}$, являющегося предельной точкой. Пусть $\bar{\bar{x}} > \bar{x}$. Введем $\varepsilon = (\bar{\bar{x}} - \bar{x})/2$. Тогда интервалы -окрестностей точек $\bar{\bar{x}}$ и $\bar{x}$ не будут пересекаться. Т.к. в $B_\varepsilon(\bar{x})$ б/м элементов $\{x_n\}$, а согласно описанию мн-ва $\{x\}$, правее $\bar{x} + \varepsilon$ лежит не более, чем конечное число элементов посл-ти, то и в $B_\varepsilon(\bar{\bar{x}})$ не более, чем конечное число элементов посл-ти $\{x_n\} \Rightarrow \bar{\bar{x}}$ не является предельной точкой. ■

Следствие 1. Все элементы ограниченной последовательности, начиная с некоторого номера, лежат на интервале $(\underline{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon)$, где $\underline{x}$ — нижний, а $\bar{x}$ — верхний предел этой последовательности.

Доказательство: рассмотреть эти окрестности для $\varepsilon/2$ и доказать, что вне интервала $(\underline{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon)$ лежит конечное число элементов данной последовательности (случай справа установлен в ходе доказательства теоремы). ■

Следствие 2. Пусть последовательность имеет своим нижним пределом число $\underline{x}$, а верхним число $\bar{x}$, кроме того, пусть вне интервала (a, b) находится не более, чем конечное число элементов последовательности. Тогда интервал (a, b) лежит внутри интервала $(\underline{x}, \bar{x})$.

Доказательство: доказать, что $a \leq \underline{x}$, $\bar{x} \leq b$. Справа от b конечное число элементов, и b - ТНГ рассмотренного в теореме множества $\{x\}$. ■

Следствие 3. Теорема Больцано-Вейерштрасса. Из всякой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство: следствие из определения (2) предельной точки и основной теоремы. ■

Последовательность называется **фундаментальной** (ФП), если $\forall \varepsilon > 0 \exists N$, т.ч. $\forall n > N, \forall p > 0 \quad |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$.

Свойство 1. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется элемент фундаментальной последовательности такой, что в ε -окрестности этого элемента находятся все последующие элементы последовательности.

Доказательство: положим в определении ФП $n = N$.

Тогда $|x_{N+p} - x_N| < \varepsilon \Leftrightarrow x_{N+p} \in (x_N - \varepsilon, x_N + \varepsilon)$. ■

Свойство 2. Фундаментальная последовательность ограничена.

Доказательство: возьмем в определении ФП $\varepsilon = 1$.

Тогда $x_n \in (x_N - 1, x_N + 1)$. Обозначим за A $\max$ из модулей элементов до $N-1$ и $|x_N - 1|, |x_N + 1|$.

Получаем $|x_N| \leq A$ – ограниченность. ■

Условие сходимости. Для того, чтобы последовательность сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она была ограниченной и ее верхний и нижний предел совпадали.

Доказательство:

Необходимость. Пусть некоторая последовательность сходится. Тогда она ограничена и имеет единственную предельную точку. Это означает, что верхний и нижний пределы совпадают.

Достаточность. Пусть последовательность ограничена (а значит, существуют верхний и нижний пределы) и ее верхний и нижний пределы совпадают. Пусть они равны x . Согласно ранее следствию 1 основной теоремы (билет 7), начиная с некоторого номера, все элементы лежат на интервале $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. А это и есть определение сходящейся к x последовательности. ■

Критерий Коши (о сходимости). Для того, чтобы последовательность сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

Доказательство:

Необходимость. Пусть последовательность сходится к некоторому пределу x . Тогда для $\varepsilon > 0$ найдется номер N , такой что для $\forall n \geq N$: $|x_n - x| < \varepsilon/2$. Тогда для любого натурального $p > 0$ и подавно выполняется $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon/2$. По свойствам модуля $|x_{n+p} - x_n| = |x_{n+p} - x + x - x_n| \leq |x_{n+p} - x| + |x - x_n| < \varepsilon$, что и означает фундаментальность последовательности.

Достаточность. Пусть последовательность фундаментальна. Для сходимости достаточно, чтобы последовательность была ограниченной и верхний предел $\bar{x}$ совпадал с нижним $\underline{x}$. Ограниченность доказана выше (свойство 2). Фиксируем ε . Далее получаем, что вне $(x_n - \varepsilon, x_n + \varepsilon)$ (свойство 1) конечное число элементов. В силу следствия 2 из теоремы о верхнем и нижнем пределе (билет 7) $(\bar{x}, \underline{x})$ обязан содержаться в интервале $(x_n - \varepsilon, x_n + \varepsilon)$, а разность между ними не больше, чем 2ε , и неотрицательна. Берем $\varepsilon = 0$ и получаем, что верхний и нижний пределы совпадают. ■

Пример: Критерий Коши используется для док-ва расходимости посл-ти $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

Определение по Гейне. Число b называется пределом функции $y = f(x)$ в точке a , если для любой последовательности $\{x_n\}$ аргументов не равных a , сходящихся к a при $n \rightarrow \infty$, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к числу b .

Определение по Коши. Число b называется пределом функции $y = f(x)$ в точке a , если для любого положительного ε найдется такое $\delta(\varepsilon)$, что для всех значений аргумента x , лежащих в проколотой δ -окрестности точки a справедливо неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon), \text{ т. ч. } \forall x \in \dot{B}_\delta(a): |f(x) - b| < \varepsilon$$

Теорема. Определения предела функции в точке по Коши и по Гейне эквивалентны.

Доказательство:

К-Г. Запишем определение предела по Коши. Рассмотрим произвольную последовательность аргументов $\{x_n\}$, т.ч. $x_n \rightarrow a, x_n \neq a$. Тогда с некоторого номера n значения x_n будут лежать в проколотой δ -окрестности точки a . Отсюда $|f(x) - b| < \varepsilon \leftrightarrow f(x)$ сходится к b . ■

Г-К. От противного: пусть определение по Коши не выполнено. Тогда существует положительное ε , т.ч. с некоего номера n найдется такое x в проколотой δ -окрестности точки a , что $|f(x) - b| \geq \varepsilon$. А это означает, что $x_n \rightarrow a (x_n \neq a)$, но $f(x)$ не сходится к числу b , а значит не выполняется определение предела по Гейне. ■

Будем говорить, что ф-ция y удовлетворяет в точке a условию Коши, если верно:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta, \text{ т. ч. } \forall x', x'' \in \dot{B}_\delta(a): |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

Критерий Коши для функций. Для того, чтобы ф-ция имела предел в точке, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла критерию Коши в этой точке.

Доказательство:

Необходимость. Пусть существует предел b функции в данной точке. Фиксируем ε . Применяем определение по Коши предела ф-ции в точке для $\varepsilon/2$ в точках x' и x'' . Применяем условие Коши: $|f(x') - f(x'')| < \{\text{раскладываем модуль}\} < \varepsilon$.

Достаточность. Пусть ф-ция удовлетворяет в точке a условию Коши. Пусть $\{x_n\}$ — любая сходящаяся к точке a последовательность значений аргумента, все элементы которой отличны от a . Нужно доказать, что последовательность значений ф-ции сходится к b , и что это число b не зависит от выбора последовательности.

Докажем сначала, что последовательность значений сходится. Фиксируем ε и соответствующее δ (по условию Коши). В силу сходимости $\exists N$, что для всех последующих n верно $0 < |x_n - a| < \delta$. Можно заменить n на $n + p$. Применяем условие Коши и получаем фундаментальную последовательность, которая сходится по критерию Коши для последовательностей: $|f(x_{n+p}) - f(x_n)| < \varepsilon$.

Теперь докажем что значение предела не зависит от выбора последовательности значений аргумента. Запишем определение предела по Гейне для $\{f(x'_n)\}$ и $\{f(x''_n)\}$ в точках b' и b'' соответственно. Рассмотрим последовательность значений аргумента вида $\{x_n\} = \{x'_1, x''_1, x'_2, x''_2, \dots\}$. Она также сходится к a и состоит из отличных от a элементов. Значит соответствующая последовательность значений функции должна сходиться к некоторому пределу b'' . Но тогда и любая ее подпоследовательность должна сходиться к тому же пределу (свойство ПП).

Отсюда $b = b' = b''$. ■

$$\begin{aligned} & /* \text{проколотая } \delta\text{-окрестность} \Leftrightarrow \forall x \in (a - \delta, a + \delta) / \{a\} \\ & \Leftrightarrow 0 < |x_n - a| < \delta */ \end{aligned}$$

Основная теорема. Пусть две функции $f(x)$ и $g(x)$ заданы на одном и том же множестве $\{x\}$ и имеют в точке a пределы b и c соответственно. Тогда ф-ции $f(x) \pm g(x), f(x) \times g(x)$ имеют в этой точке пределы, соответственно равные $b \pm c, b \times c$.

Доказательство: рассмотрим произвольную сходящуюся к a последовательность значений аргумента $\{x_n\}$, отличных от a . Тогда соответствующие последовательности значений ф-ций $\{f(x_n)\}$ и $\{g(x_n)\}$ сходятся к пределам b и c соответственно. Но тогда последовательности $\{f(x_n) + g(x_n)\}$ и т. д. сходятся к указанным выше пределам по свойствам арифметических операций над последовательностями. В силу произвольности выбора последовательности, значений аргумента и в силу определения по Гейне теорема доказана. ■

Функция называется **бесконечно малой** в точке a , если предел этой функции в точке a равен 0.

Функция называется **бесконечно большой** в точке a справа (слева), если для любой сходящейся к a последовательности значений аргумента, все элементы которой строго больше a (меньше a), соответствующая последовательность значений функции является бесконечно большой, причем все элементы, начиная с некоторого номера, либо положительны, либо отрицательны.

Если ф-ция $f(x)$ имеет предел b в точке a , то можно представить ее в виде $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая в точке a ф-ция.

Принцип сравнения ББ, БМ ф-ций:

Пусть α и β — две бесконечно малые функции. Тогда $\alpha(x)$ является бесконечно малой в точке a **более высокого порядка**, чем $\beta(x)$, если предел их отношения в этой точке равен 0 ($\alpha = o(\beta)$); имеют **одинаковый порядок малости**, если этот предел равен отличному от нуля конечному числу; **эквивалентны**, если предел равен 1 ($\alpha \sim \beta$).

Свойства символа «о малое»:

$$o(\beta) + o(\beta) = o(\beta);$$

$$o(\beta) + o(o(\beta)) = o(\beta);$$

$$\alpha\beta = o(\alpha) = o(\beta).$$

Аналогично для бесконечно больших функций. Функция A имеет **более высокий порядок роста** в точке a справа, чем функция B , если отношение их является бесконечно большой функцией в данной точке справа; и **одинаковый порядок роста**, если предел этого отношения равен конечному числу, отличному от 0.

Примеры:

$$1) x^5 = \bar{o}(x^2), x \rightarrow 0$$

$$2) \frac{1}{x^2+3x+1} = O\left(\frac{1}{x^2}\right), x \rightarrow \infty$$

Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке a** , если она имеет в этой точке предел и этот предел равен значению ф-ции в этой точке.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Коши: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon), \text{ т. ч. } \forall x \in \dot{B}_\delta(a): |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке a справа (слева)**, если правый (левый) предел в этой точке существует и равен значению ф-ции в этой точке.

Точки, в которых функция не обладает свойством непрерывности, называются **точками разрыва**. Функция называется **непрерывной на множестве**, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Теорема. Пусть на одном и том же множестве заданы ф-ции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывные в точке a . Тогда функции, получаемые в результате арифметических операций, непрерывны в точке a .

Доказательство: так как функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны, то они имеют пределы в точке a . Тогда по основной теореме об операциях с «предельными» функциями (билет 10) полученные в результате арифметических операций величины равны частным значениям функций в точке a (непрерывны в a по определению). ■

Точки разрыва делятся на три класса:

- **точки разрыва I рода**
(односторонние пределы в точке не совпадают)

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) - \text{разрыв в } x = 0$$

- **точки разрыва II рода**
(предел в точке не существует [ф-ция не имеет хотя бы одного из односторонних пределов или хотя бы один из них бесконечен])

$$f(x) = \operatorname{tg}(x) - \text{разрыв в } x = \frac{\pi}{2} + \pi k.$$

$$f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{при } x > 0, \\ x & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

- **точки устранимого разрыва**
(односторонние пределы равны, но функция не определена в этой точке)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 0,5 & \text{при } x = 0. \end{cases} - \text{разрыв в нуле}$$

Примеры:

$$1) f(x) = \frac{\sin(x)}{|x|} - \text{разрыв в } x = 0$$

$$2) f(x) = x \cdot D(x) - \text{непрерывна в нуле и разрывная на всех остальных точках числовой оси, где } D(x) = \{0, x \in \mathbb{Q}; 1, x \notin \mathbb{Q}\}$$

Локальные свойства характеризуют поведение функции при стремлении аргумента к исследуемой точке. Непрерывность в точке – локальное свойство.

Теорема о локальной ограниченности.

Пусть $f(x)$ задана на множестве $\{x\}$ и имеет конечный предел в точке a . Тогда существует $\delta > 0$, такое что $f(x)$ ограничена на $\{x\} \cap (a - \delta, a + \delta)$.

Доказательство: Пусть предел $f(x)$ в точке a равен b . Тогда, расписывая предел по Коши для $\varepsilon - \delta$, получаем $b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$. В случае, если $\{x\}$ не содержит a , ограниченность доказана.

Если $\{x\}$ содержит a , обозначим наименьшее из $f(a)$ и $b - \varepsilon$ за m , наибольшее из $f(a)$, $b + \varepsilon$ за M . Тогда $m \leq f(x) \leq M$. ■

Теорема об устойчивости знака.

Пусть $f(x)$ задана на множестве $\{x\}$, непрерывна в точке a и ее значение $f(a)$ положительно (отрицательно). Тогда существует такое положительное δ , что $f(x)$ является положительной (отрицательной) всюду на $\{x\} \cap (a - \delta, a + \delta)$.

Доказательство: расписывая предел по Коши для $\varepsilon - \delta$ получаем $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Если в качестве ε взять $|f(a)|/2$ и развернуть модуль, то крайние числа будут положительны при $f(a) > 0$ и отрицательны при $f(a) < 0$. ■

Теорема об односторонней устойчивости знака.

Пусть $f(x)$ задана на множестве $\{x\}$, непрерывна в точке a этого множества справа (слева) и ее значение $f(a)$ отлично от 0. Тогда найдется такое положительное δ , что $f(x)$ не обращается в 0 и имеет тот же знак, что и в точке a , для всех значений из мн-ва $\{x\}$, принадлежащих правой (левой) δ -полукрестности точки a .

Доказательство: аналогично предыдущей теореме, заменяя в определении по Коши δ -окрестность на δ -полукрестность. ■

Пусть функция $x = \varphi(t)$ задана на множестве $\{t\}$, и пусть $\{x\}$ – множество её значений. Пусть на множестве $\{x\}$ задана функция $y = f(x)$. Тогда говорят, что на множестве $\{t\}$ задана **сложная функция** $y = f(\varphi(x)) = F(t)$ или $y = f(x)$, где $x = \varphi(t)$.

Теорема. Пусть $f(x) = \varphi(t)$ непрерывна в точке a , а $f(x) = y = f(x)$ — в точке $b = \varphi(a)$. Тогда сложная функция $z = f(\varphi(t)) = F(t)$ непрерывна в точке a .

Доказательство: Рассмотрим произвольную последовательность значений аргумента $\{t_n\} \rightarrow a$. Тогда по Гейне и непрерывности $\varphi(t)$: $x_n = \varphi(t_n) \rightarrow \varphi(a) = b$.

Итак, $x_n \rightarrow b$. Тогда по Гейне и непрерывности $f(x)$: $y_n = f(x_n) \rightarrow f(b) = f(\varphi(a)) = F(a)$. ■

Пусть ф-ция $y = f(x)$ определена на сегменте $[a, b]$ и пусть сегмент $[\alpha, \beta]$ является множеством значений этой функции. Пусть также каждому y из этого сегмента соответствует ровно одно значение x из сегмента $[a, b]$. Тогда на этом сегменте существует обратная f функция $x = f^{-1}(y)$.

Лемма. Если ф-ция $f(x)$ является монотонной на сегменте $[a, b]$, то у нее $\exists \lim_+ f(x), \lim_- f(x) \forall x \in [a, b]$ и существуют правый предел в т. a , левый – в b .

Доказательство: Пусть $f(x)$ не убывает на $[a, b]$. Докажем существование правого предела в любой точке $c \in [a, b)$. Рассмотрим множество $\{f(x) | c < x \leq b\}$: оно непусто ($c < b$), ограничено снизу ($f(x)$ неубывает $\Rightarrow f(c) \leq f(x)$) $\Rightarrow \exists \text{ТНГ } \gamma$. Докажем, что $\gamma = \lim_{x \rightarrow c} f(x)_+$, т.е. $\gamma = f(c + 0)$.

Фиксируем ε . По опр. ТНГ $\exists \delta > 0, \delta < b - c$, т.ч. $f(c + \delta) < \gamma + \varepsilon$. В силу неубывания $f(x) < \gamma + \varepsilon$, а т.к. $\gamma \leq f(x)$ (ТНГ) имеем $\gamma \leq f(x) < \gamma + \varepsilon$ или $|f(x) - \gamma| < \varepsilon$, т.е. γ – предельная точка. ■

Теорема 1. Пусть ф-ция $f(x)$ возрастает на сегменте $[a, b]$ и пусть $\alpha = f(a), \beta = f(b)$. Если $\{f(x)\} \in [\alpha, \beta]$, то на нем определена обратная ф-ция $f^{-1}(y)$, также возрастающая.

Доказательство: Пусть $y \uparrow: y_1 < y_2 \Rightarrow x_1 = f^{-1}(y_1) < x_2 = f^{-1}(y_2)$, ибо из $(x_1 \geq x_2 \text{ и } y \uparrow) \Rightarrow y_1 \geq y_2$, но $(y_1 < y_2)$ (!). ■

Теорема 2. Пусть ф-ция $f(x)$ возрастает на сегменте $[a, b]$ и пусть $\alpha = f(a), \beta = f(b)$. Тогда условием непрерывности ф-ции на сегменте будет то, что любое число $\gamma \in [\alpha, \beta]$, было значением этой ф-ции.

Доказательство:

Необходимость. Пусть $f(x)$ возрастает и непрерывна на $[a, b]$. Надо д-ть, что для $c \in [a, b]$, $f(c) = \gamma \in [\alpha, \beta]$.

Рассмотрим $\{x\} = \{x \in [a, b] | f(x) \leq \gamma\}$: оно не пусто ($a \in \{x\}$), ограничено числом b . Тогда $\exists \text{ТВГ } c$. Докажем, что $f(c) = \gamma$.

Из опр-я ТВГ и опр-я мн-ва $\{x\}: f(x) \leq \gamma \forall x$ лежащих левее c . Любое $x > c$ не принадлежит мн-ву $\{x\}$, поэтому $f(x) > \gamma \forall x$ правее c .

Докажем, что $c \in [a, b]$, а именно, что $c < b$ ($a < c$ аналогично). Предположим, что это не так: пусть $c = b$. Берем посл-ть $\{x_n\} \rightarrow c$. Все элементы x_n левее $c \Rightarrow x_n \in \{x_n\}$ и $f(x_n) < \gamma \Rightarrow \lim f(x_n) \leq \gamma$. Из непрерывности $f(x)$ в точке $c = b$ имеем $\lim f(x_n) = f(b)$, откуда $f(b) \leq \gamma$ (!) $\Rightarrow c < b$.

Для доказательства равенства $f(c) = \gamma$ рассмотрим сходящиеся к c с разных сторон посл-ти $\{x'_n\} \uparrow$ и $\{x''_n\} \downarrow$. Из непрерывности $f(x)$ в точке c следует $\lim f(x'_n) = \lim x''_n = f(c)$. Но поскольку $x'_n < c < x''_n \forall n$, имеем $f(x'_n) \leq \gamma$ и $f(x''_n) > \gamma \forall n$. Тогда $\lim f(x'_n) \leq \gamma = f(c)$, $\lim x''_n \geq \gamma = f(c)$, т.е. $f(c) = \gamma$.

Достаточность. Пусть ф-ция $f(x)$ возрастает на сегменте $[a, b]$ и $f(c) = \gamma \in [\alpha, \beta]$. Достаточно доказать, что $f(x)$ непрерывна справа в любой точке полуинтервала $[a, b)$ и слева в любой точке полуинтервала $(a, b]$. Ограничимся доказательством первого факта. Пусть ф-ция не является непрерывной, тогда правый предел $f(c + 0) \neq f(c) \Rightarrow \alpha = f(a) \leq f(c) < f(c + 0) \leq f(x) \leq f(b) = \beta$ для $\forall x \in (c, b]$. Значит, в $(f(c), f(c + 0))$ не содержит значений ф-ции $f(x)$ (! По условию $\forall \gamma \in [\alpha, \beta]$ является значением ф-ции, т.е. $\exists c$, т.ч. $f(c) = \gamma$). ■

Теорема 3. Пусть ф-ция $f(x)$ возрастает и непрерывна на сегменте $[a, b]$ и пусть $\alpha = f(a), \beta = f(b)$. Тогда на сегменте $[\alpha, \beta]$ определена обратная ф-ция $f^{-1}(y)$, которая возрастает и непрерывна на этом сегменте.

Доказательство: по теореме 1 на этом сегменте определена обратная ф-ция. Остается доказать, что обратная ф-ция непрерывна на сегменте $[\alpha, \beta]$. Применяем теорему 2, где множеством значений ф-ции является отрезок $[f^{-1}(\alpha), f^{-1}(\beta)]$. ■

Теорема. У монотонной ф-ции точки разрыва могут быть только первого рода.

Простейшие элементарные ф-ции: степенная, показательная, логарифмическая, синус, косинус, тангенс, котангенс, арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс.

Функциональный аналог принципа двустороннего ограничения. (ФАПДО) Пусть в некоторой проколотой δ -окрестности точки a заданы три ф-ции $f(x), g(x), h(x)$, из которых $f(x)$ и $g(x)$ имеют в т. a одинаковый предел, равный b . Тогда, если в указанной окрестности всюду справедливо $f(x) < h(x) < g(x)$, ф-ция h имеет пределом в т. a то же значение b .

Доказательство: рассмотрим произвольную сходящуюся к a последовательность значений аргумента, элементы которой отличны от a . Тогда, с одной стороны, соответствующие последовательности значений ф-ции сходятся к b , а с другой стороны справедливо $f(x_n) < h(x_n) < g(x_n)$. Тогда по теореме «о двух милиционерах» соответствующая последовательность для h также сходится к b , что и доказывает теорему. ■

I замечательный предел.

Предел ф-ции $\sin x/x$ в точке 0 существует и равен 1.

Доказательство: Неравенство $0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x$ (при $0 < x < \pi/2$) разделим на положительное $\sin x$ и получим $1 < x/\sin x < 1/\cos x$. Перевернем дроби и расширим интервал до $(-\pi/2, \pi/2)$, т. к. все ф-ции четные. Обе боковые ф-ции имеют в точке 0 предел, равный 1, а значит и у центральной ($\sin x/x$) предел тоже равен 1. ■

Теорема. Предел ф-ции $f(x) = (1+x)^{1/x}$ в точке 0 существует и равен числу e .

Доказательство: рассмотрим односторонние пределы, докажем, что они существуют и равны e .

Правый предел (по Коши).

Требуется доказать, что для любого ε найдется такое δ , что для любого x из интервала $(0, \delta)$ справедливо $|f(x) - e| < \varepsilon$. Фиксируем ε и рассматриваем две

последовательности: $a_n = (1 + 1/(1+n))^n$ и $b_n = (1 + 1/n)^{n+1}$. Обе эти последовательности сходятся к e (расписываем a_n и b_n через $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n = e$), значит, найдется такой номер N , начиная с которого одновременно справедливы неравенства $|a_n - e| < \varepsilon$ и $|b_n - e| < \varepsilon$ (условие сходимости к e). Теперь убедимся в том, что если взять $\delta = 1/N$, то для любого x из интервала $(0, \delta)$ будет справедливо неравенство $|f(x) - e| < \varepsilon$. Пусть $n = [1/x]$. Тогда $n \leq \frac{1}{x} < n+1$. Отсюда $(1 + 1/(1+n))^n < 1+x < (1 + 1/n)^{n+1}$. Учитывая свойства показательной ф-ции приходим к неравенству $a_n - e < (1+x)^{1/x} - e < b_n - e$. ($= \varepsilon$)

Левый предел (по Гёйне). Рассмотрим произвольную бесконечно малую последовательность $\{x_n\}$ отрицательных чисел, причем, начиная с того номера, с которого ее элементы по модулю меньше 1. Пусть $y_n = -\frac{x_n}{(1+x_n)}$, тогда $x_n = -\frac{y_n}{(1+y_n)}$. Тогда y_n — БМП из положительных чисел, причем

$$f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + y_n)^{\frac{1}{y_n}}.$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + y_n)^{\frac{1}{y_n}} \times \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + y_n).$$

Но поскольку $y_n > 0, y_n \rightarrow 0, \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + y_n)^{\frac{1}{y_n}} = e$ в силу ранее доказанного. Левый и правый пределы доказаны. ■

Теорема. Предел ф-ции $f(x) = \ln(1+x)/x$ в точке 0.

Доказательство:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln e = 1 \quad \blacksquare$$

Теорема о прохождении через нуль. Пусть f -ция непрерывна на сегменте $[a, b]$, и пусть значения этой f -ции на концах сегмента — числа разных знаков. Тогда внутри сегмента найдется такая точка ξ , значение f -ции в которой равно 0.

Доказательство: пусть $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, а $\{x\} = \{x \in [a, b] | f(x) < 0\}$. Это множество непустое ($x = a$) и ограниченное сверху ($x = b$), тогда у него есть точная верхняя грань ξ . Докажем от противного. Заметим, что ξ — внутренняя точка сегмента (так как в полукрестностях от границ знак сохраняется согласно локальным свойствам непрерывной f -ции). Пусть $f(\xi) = 0$. Если это не так, то существует δ -окрестность этой точки, где f -ция имеет определенный знак. А это невозможно по определению точной верхней грани, т.к. нашлось бы такое x из $(\xi - \delta, \xi]$, что $f(x) < 0$, а для $\forall x$ из $(\xi, \xi + \delta)$ $f(x) > 0$. (?)! ■

Теорема по теме. Пусть f -ция непрерывна на сегменте $[a, b]$, причем $f(a) = \alpha, f(b) = \beta$. Пусть, далее, γ — любое число, заключенное между α и β . Тогда на сегменте $[a, b]$ найдется точка ξ такая, что $f(\xi) = \gamma$.

Доказательство: Возьмем $\alpha < \gamma < \beta$. Рассмотрим f -цию $\varphi(x) = f(x) - \gamma$. Эта f -ция непрерывна на $[a, b]$ и имеет на его концах значения разных знаков: $\varphi(a) = f(a) - \gamma = \alpha - \gamma < 0$, $\varphi(b) = f(b) - \gamma = \beta - \gamma > 0$. По предыдущей теореме внутри $[a, b]$ найдется такая точка ξ , что $f(\xi) - \gamma = 0$, а значит $f(\xi) = \gamma$. ■

Первая теорема Вейерштрасса. Если f -ция непрерывна на сегменте $[a, b]$, то она ограничена на этом сегменте.

Доказательство: Докажем ограниченность сверху от противного: пусть f -ция не ограничена сверху. Тогда для любого натурального n найдется хотя бы одна точка x_n из $[a, b]$ такая, что $f(x_n) > n$. Таким образом соответствующая последовательность значений f -ции будет бесконечно большой. По теореме Больцано-Вейерштрасса из ограниченной последовательности значений аргумента можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке ξ . Эта точка будет принадлежать сегменту $[a, b]$ (билет 6, т.1). В силу непрерывности f -ции последовательность значений f -ции также должна сходиться (к числу $f(\xi)$). Однако любая подпоследовательность бесконечно большой f -ции — ББП. Полученное противоречие доказывает теорему. Ограниченность снизу доказывается аналогично. ■

Число M называется точной верхней гранью функции на данном множестве $\{x\}$, если:

1. $\forall x \in \{X\}$ справедливо неравенство $f(x) \leq M$,
2. $\forall \varepsilon > 0$ существует значение $x \in \{X\}$:
 $f(x) > M - \varepsilon$.

Вторая теорема Вейерштрасса. Если ф-ция непрерывна на сегменте $[a, b]$, то она достигает на этом сегменте своих точных верхних и нижних граней.

Доказательство: В силу первой теоремы Вейерштрасса ф-ция ограничена на данном сегменте, поэтому у нее существует точная верхняя грань M и точная нижняя грань m . Остановимся на доказательстве достижимости M . Пусть точная верхняя грань M недостижима, т.е. функция $f(x) < M$. Тогда можно рассмотреть ф-цию $F(x) = \frac{1}{M - f(x)}$. Эта функция непрерывная и строго положительная на сегменте $[a, b]$. Тогда по первой теореме Вейерштрасса она ограничена некоторым числом A на этом сегменте, то есть $\frac{1}{M - f(x)} \leq A$,
 $f(x) \leq M - \frac{1}{A}$. Здесь $M - \frac{1}{A}$ не является ТВГ (противоречие 2-му условию ТВГ). Значит ТВГ достижима. ■

Функция называется **равномерно непрерывной** на множестве $\{x\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \text{ т. ч. } \forall x', x'' \in \{x\}, |x' - x''| < \delta: \\ |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Замечание 1. $f(x)$ р/н на $\{x\} \Rightarrow$ р/н в каждой т. $x \in \{x\}$.

Замечание 2. Основным в теореме является требование существования по $\forall \varepsilon > 0$ универсального δ .

Замечание 3. $f(x)$ р/н на $\{x\} \Rightarrow$ р/н на подмн-ве $\{x\}$.

Теорема Кантора. Если ϕ -ция непрерывна на сегменте $[a, b]$, то она и равномерно непрерывна на этом сегменте.

Доказательство: предположим, что ϕ -ция не является равномерно непрерывной на данном сегменте. Тогда для некоторого ε и любого δ (сколь угодно малого) найдутся две точки сегмента x' и x'' такие, что $|x' - x''| < \delta$, но $|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon$. Возьмем бесконечно малую последовательность $\delta_n = 1/n$. Тогда для указанного ε и $\forall n \exists x'_n, x''_n \in [a, b]$ такие, что $|x'_n - x''_n| < 1/n$, но $|f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \varepsilon$. Псл-ть $\{x'_n\}$ ограничена (состоит из точек $[a, b]$), поэтому по теореме Больцано-Вейерштрасса из нее можно выделить сходящуюся подпсл-ть $\{x'_{k_n}\}$. Обозначим ее предел за $\xi \in [a, b]$. Подпсл-ть $\{x''_{k_n}\}$ будет также сходиться к ξ . ϕ -ция непрерывна в каждой точке сегмента, а значит и в точке ξ . Тогда в силу определения по Гейне обе подпсл-ти соответствующих значений ϕ -ций $\{f(x'_{k_n})\}, \{f(x''_{k_n})\}$ обязаны сходиться к $f(\xi)$, то есть разность этих подпоследовательностей есть БМП. Это противоречит тому, что $|f(x'_{k_n}) - f(x''_{k_n})| \geq \varepsilon$ (справедливо для $\forall n \Rightarrow \forall k_n$). Теорема доказана. ■

Пример: $y = \sin(1/x)$ – р/н на $(\gamma, 1)$, $\gamma \in (0, 1)$

Пусть ϕ -ция ограничена на данном сегменте $[a, b]$. Назовем **колебанием ϕ -ции на этом сегменте** разность $\omega = M - m$ между точной верхней и точной нижней гранью ϕ -ции на этом сегменте.

Следствие. Если ϕ -ция непрерывна на данном сегменте, то для любого положительного ε найдется соответствующее δ такое, что колебание ϕ -ции на любом сегменте (содержащемся в рассматриваемом) длины, меньшей δ , будет меньше числа ε .

Рассмотрим функцию, заданную на интервале (a, b) . Пусть x — любая фиксированная точка этого интервала, а Δx — произвольное число, настолько малое, что значение $x + \Delta x$ также находится на этом интервале. Это число Δx называют **приращением аргумента**.

Приращением функции в точке x называют число $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Разностная форма условия непрерывности:

Δy — БМ при $\Delta x \rightarrow 0$. ($\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$)

Отношение $\Delta y / \Delta x$ называют **разностным отношением**.

Производной функции в данной точке x называют предел при Δx стремящемся к 0 разностного отношения (при условии, что этот предел существует).

$$\text{Или } f'(c) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Функция называется **дифференцируемой в точке x** , если приращение Δy этой функции в точке x , соответствующее приращению Δx , может быть представлено в виде $\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$, где A — некоторое независимое от Δx число, а $\alpha(\Delta x)$ — бесконечно малая в нуле функция.

Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x , отвечающим приращению аргумента Δx называется число, обозначаемое символом **dy** и равное **$dy = f'(x)dx$** .

Тогда в $\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$: $A = f'(x)\Delta x$ — главная часть приращения Δy ; dx — приращение Δx ; $\alpha(\Delta x)\Delta x$ — БМ более высокого порядка, $o(\Delta x)$.

Теорема. Для того, чтобы ф-ция была дифференцируемой в точке x , необходимо и достаточно, чтобы она имела в этой точке конечную производную.

Доказательство:

Необходимость. Поделим выражение $\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$ на Δx . В точке $\Delta x = 0$ правая (и левая) части имеют равный A предел. А предел левой части по определению равен значению производной в точке.

Достаточность. Обозначим как $\alpha(\Delta x)$ разность разностного отношения и $f'(x)$. Эта ф-ция будет иметь при $\Delta x \rightarrow 0$ предел, равный 0. Умножим соотношение на Δx и получим $\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$. ■

Теорема. Правила дифф-я суммы, произведения и частного верны.

Доказательство: обозначим символами Δu , Δv , Δy приращения ф-ций $u(x)$, $v(x)$, $y(x)$ в данной точке x , отвечающее приращению Δx . Расписываем $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ через сумму / произведение $(\pm u(x + \Delta x)v(x))$ / частное (к числителю $\pm u(x)v(x)$) Δu и Δv . ■

Теорема. Пусть ф-ция $\varphi(t)$ дифф-ма в точке t , а ф-ция $f(x)$ – в точке $x = \varphi(t)$. Тогда сложная ф-ция $y = f(\varphi(t))$ дифференцируема в точке t , причем ее производная в этой точке равна $f'(\varphi(t))\varphi'(t)$.

Доказательство: придадим аргументу t приращение Δt . Ему будет соответствовать $\Delta x = \varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)$, а этому приращению, в свою очередь, — приращение $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Это можно представить в виде $\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$. Поделим все на Δt и докажем, что правая часть имеет предел при $\Delta t \rightarrow 0$. Отношение $\Delta x/\Delta t$ имеет предел, равный $\varphi'(t)$, а $\alpha(\Delta x)$ — предел, равный 0 ($\Delta x \rightarrow 0$ при $\Delta t \rightarrow 0$ на основании разностной формы непрерывности $x = \varphi(t)$). ■

Теорема. Пусть ф-ция $y = f(x)$ возрастает и непрерывна в некоторой окрестности точки x . Пусть также она дифф-ма в этой точке и ее производная отлична от 0. Тогда в некоторой окрестности определена обратная функция, причем она дифференцируема в точке $y = f(x)$ и ее производная в этой точке равна $1/f'(x)$.

Доказательство: в силу задания $f(x)$ обратная ф-ция будет определена, строго монотонна и непрерывна в некоторой окрестности точки y . Придадим ей некоторое приращение $\Delta y \neq 0$, которому соответствует приращение $\Delta x = f^{-1}(y + \Delta y) - f^{-1}(y)$. Тогда в силу монотонности ф-ции Δx также отлично от нуля. $\Delta x/\Delta y = 1/(\Delta y/\Delta x)$. Пусть $\Delta y \rightarrow 0$. Тогда в силу разностной непрерывности обратной функции приращение Δx также стремится к 0. Расписываем приращение Δy : $x = f^{-1}(y)$, $x + \Delta x = f^{-1}(y + \Delta y)$, $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$. Получаем справа $1/\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = 1/f'(x)$. ■

Дифф-е простейших элементарных функций:

- $(\sin x)'$: По опр-ю. Расписать разность синусов.
- $(\cos x)'$: Через $\sin(\pi/2 - x)$.
- $(\operatorname{tg} x)'$: Производная частного.
- $(\operatorname{ctg} x)'$: Производная частного.
- $(\log_a x)'$: По опр-ю, домножить и поделить на x . Второй ЗП.
- $(a^x)'$: Записать как $1/(\log_a y)'$.
- $(\arcsin x)'$: Через $f^{-1}(y)$.
- $(\arccos x)'$: Через $f^{-1}(y)$.
- $(\operatorname{arctg} x)'$: Через $f^{-1}(y)$.
- $(\operatorname{arcctg} x)'$: Через $f^{-1}(y)$.
- $(x^a)'$: $(a^{\log_a x})^a = a^{a \log_a x}$. Дифференцируем.

(Стр. 205)

Представление $dy = f'(x)dx$ справедливо и в случае, когда x сам является диф-мой ф-цией $x = \varphi(t)$ некоторой независимой переменной t . Это свойство дифференциала ф-ции принято называть инвариантностью его формы.

Доказательство: пусть аргумент x ф-ции $y = f(x)$ является диф-мой ф-цией вида $x = \varphi(t)$. Поскольку t – независимая переменная, можем представить $dy = [f(\varphi(t))]'dt$, $dx = \varphi'(t)dt$, где по правилу $f'(\varphi(t)) = f'(x)\varphi'(t)$. Тогда $dy = f'(x)\varphi'(t)dt = f'(x)dx$. ■

Пусть x – независимая переменная и $y = f(x)$. Вообще говоря $dy \neq \Delta y$. Но с точностью до БМ ф-ции более высокого порядка роста малости, чем Δx , справедливо: $\Delta y \approx dy$. Отношение $(\Delta y - dy)/\Delta x$ естественно называть относительной погрешностью.

Приближенное равенство можно переписать как: $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$, что позволяет с ошибкой $o(\Delta x)$ заменить $f(x)$ в малой окрестности точки x .

Пример:

$$\sqrt[4]{1,01} = \{f(x) = f'(x)\Delta x - f(x + \Delta x); x = 1, \Delta x = 0,01\}$$

$$= \sqrt[4]{1} + \frac{1}{4}x|_{x=1}^{-\frac{3}{4}} \times 0,01 = 1 + 0,0025 = 1,0025$$

Пусть ф-ция $f(x)$ дифференцируема в точке $x \in (a, b)$. Если $f'(x)$ дифференцируема в x , то её производная называется **производной второго порядка**.

Обозначения: $d^n y = f^{(n)}(x) = f^{(n-1)}(x)|_x$

Замечание. Дифференциал порядка $n \geq 2$, вообще говоря, не обладает свойством инвариантности. Если x — независимая переменная, то $d^2 x = \dots = d^n x = 0$. Равенство $d^n y = f^{(n)}(x) dx^n$ справедливо для случая, когда x — независимая переменная. В другом случае $d^n y = f^{(n)}(x) d^n x$.

$$(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$$

$$(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a$$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)$$

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)$$

$$(\arctg x)^{(n)} = \frac{(n-1)!}{(1+x^2)^{n/2}} \sin\left(n\left(\arctg x + \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{(n)} = (ad-bc)(-1)^{n-1} n! (cx+d)^{-(n+1)} c^{n-1}$$

Формула Лейбница: Пусть $u(x), v(x)$ n раз дифф-мы.

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)} =$$

$$= u^{(n)} v + C_n^1 u^{(n-1)} v^{(1)} + \dots + u v^{(n)}.$$

Доказательство: индукция по n . Заметить, что

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}, \text{ а } C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k. \blacksquare$$

Функция считается **заданной параметрически**, если обе переменные x и y заданы как ф-ции третьей переменной t (**параметр**): $\begin{cases} y = \psi(t) \\ x = \varphi(t) \end{cases}$.

Справедливы равенства: $dy = \psi'(t)dt$, $dx = \varphi'(t)dt$. Отсюда $y'(x) = dy/dx = \psi'(t)/\varphi'(t)$.

Функция $f(x)$ возрастает в точке c , если $\exists \delta > 0$, т.ч. $f(x) < f(c) \forall x \in (-\delta, c)$ и $f(x) > f(c) \forall x \in (c, \delta)$.

Функция $f(x)$ имеет в точке c локальный максимум (минимум), если $\exists \delta > 0$, т.ч. $f(x) \leq f(c) [\geq] \forall x \in B_\delta(c)$.

Достаточное условие возрастания ф-ции в точке. Если ф-ция дифференцируема в точке c и $f'(c) > 0$, то ф-ция возрастает в этой точке.

Доказательство: Запишем $f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$. По определению предела ф-ции по Коши для $\varepsilon = f'(c)$ найдется δ такое, что $\left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - f'(c) \right| < f'(c)$ при $0 < |x - c| < \delta$. Раскрываем модули, получаем, что $\forall x \in \dot{B}_\delta(c): \frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$, т.е. $f(x) < f(c) \forall x \in (-\delta, c)$ и $f(x) > f(c) \forall x \in (c, \delta)$. ■

Необходимое условие экстремума ф-ции в точке. Если ф-ция дифференцируема в точке c и имеет в этой точке локальный экстремум, то $f'(c) = 0$.

Доказательство: по условию в точке c существует конечная производная $f'(c)$. Так как ф-ция имеет в точке c локальный экстремум, то она не может ни возрастать, ни убывать в ней. Согласно предыдущей теореме производная не может быть ни положительной ни отрицательной. Соответственно, $f'(c) = 0$. ■

Теорема Ролля. Пусть ф-ция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и дифференцируема на этом интервале. Пусть, кроме того, $f(a) = f(b)$. Тогда внутри сегмента найдется точка c такая, что $f'(c) = 0$.

Доказательство: так как ф-ция непрерывна на сегменте, то согласно второй теореме Вейерштрасса она достигает на нем своего максимального и минимального значения (соответственно, M и m). Возможны два случая:

$M = m$. В этом случае $f(x) = M = m = \text{const}$. Поэтому производная равна 0 в любой внутренней точке сегмента.

$M > m$. Можно утверждать, что хотя бы одно из граничных значений достигается во внутренней точке ξ сегмента $[a, b]$. Но тогда ф-ция $f(x)$ имеет в этой точке c локальный экстремум. Поскольку ф-ция $f(x)$ дифф-ма в точке ξ , то по ранее доказанному значение производной в ней равно 0. ■

Геометрический смысл теоремы Ролля. Если ординаты концов кривой равны, то, согласно теореме Ролля, на кривой существует точка, касательная к которой параллельна оси абсцисс.

Теорема Лагранжа. Если f -ция непрерывна на сегменте $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b) , то внутри сегмента найдется точка c такая, что справедлива формула $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Доказательство: рассмотрим на сегменте $[a, b]$ вспомогательную Φ -цию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Для Φ -ции F выполнены все условия теоремы Ролля. Значит, внутри $[a, b]$ найдется точка c такая, что $F'(c) = 0$. Расписываем Φ -цию и получаем доказательство. ■

Геометрический смысл теоремы Лагранжа. На кривой найдется такая точка, что касательная к ней будет параллельна отрезку, соединяющему концы кривой.

Ф-ла Лагранжа через приращение Δx :

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta x f'(x_0 + \theta \Delta x),$$

где $(x_0 + \Delta x) \in [a, b]$ и $0 < \theta < 1$.

Теорема о постоянстве функции. Если f -ция дифференцируема всюду на интервале (a, b) и всюду на этом интервале производная равна 0, то на этом интервале f -ция постоянна.

Доказательство: фиксируем точку x_0 на этом интервале и рассматриваем произвольную точку x на этом интервале. Сегмент $[x_0, x]$ или $[x, x_0]$ целиком принадлежит рассматриваемому интервалу, поэтому на нем выполняются необходимые для применения теоремы Лагранжа условия. Имеем $f(x_0) = f(x)$ ($f'(\xi) = 0$) значит f -ция постоянная. ■

Условие неубывания функции. Для того, чтобы дифференцируемая на интервале (a, b) функция не убывала на этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы производная этой функции была неотрицательной всюду на этом интервале. $\leq \geq$

Доказательство:

Достаточность. Пусть $f'(x) \geq 0$ и x_1 и x_2 — любые две точки интервала, причем $x_1 < x_2$. f -ция дифференцируема всюду на сегменте $[x_1, x_2]$, поэтому можно применить теорему Лагранжа. Т.к. по условию $f'(\xi) \geq 0$ и $x_1 < x_2$, получаем, что правая, следовательно и левая части равенства Лагранжа неотрицательны и $f(x_2) - f(x_1) > 0$. ■

Необходимость. Пусть f -ция диф-ма и не убывает на $[a, b]$. Так как f -ция не убывает на интервале, то она не может убывать ни в одной точке интервала. Тогда производная ни в одной точке не может быть отрицательной (билет 24, теорема о локальных экстремумах). ■

Теорема. Для того, чтобы f -ция возрастала на интервале (a, b) достаточно, чтобы производная $f'(x)$ была положительной всюду на этом интервале.

Доказательство: аналогично док-ву достаточности предыдущей теоремы, но $f'(\xi) > 0$. ■

Лемма. Пусть функция имеет конечную производную всюду на интервале $(c, c + \delta)$, $\delta > 0$ и имеет правую производную $f'(c + 0)$. Тогда, если производная имеет в точке c правый предел, то этот предел совпадает с правой производной.

Доказательство: из существования правой производной вытекает существование равного нулю правого предела $\lim_{x \rightarrow c+0} (f(x) - f(c))$. Фиксируем любое h из интервала $(c, c + \delta)$. Можно применить на сегменте $[c, x]$ теорему Лагранжа. Переходим к пределу при стремлении к c справа. Правая (а значит, и левая) часть обязана стремиться к правому пределу производной в точке c . Но предел левой части равен правой производной в точке c , что и требовалось доказать. ■

Следствие. Если функция имеет конечную производную всюду на интервале (a, b) , то эта производная не может иметь на этом интервале ни точек устранимого разрыва, ни точек разрыва первого рода.

Доказательство: если в некоторой точке c существуют конечные левый и правый пределы производной, то она непрерывна в этой точке (в силу доказанной леммы). Если же хотя бы одного из пределов не существует, то f -ция терпит в этой точке разрыв второго рода. ■

Формула Коши (обобщенная формула конечных приращений). Если каждая из двух ф-ций $f(x)$ и $g(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b) и, кроме того, производная $g'(x) \neq 0$ всюду на этом сегменте, то $\exists \xi \in [a, b]$ такая, что справедлива формула $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

Доказательство: докажем сначала, что $g(a)$ отлично от $g(b)$. Если это не так, то по теореме Ролля внутри сегмента найдется такая точка ξ , что $g'(\xi) = 0$, что противоречит условию. Итак $g(a) \neq g(b)$. Рассмотрим теперь вспомогательную ф-цию $F(x) = f(x) - f(a) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \right] (g(x) - g(a))$. Эта ф-ция непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема во всех его внутренних точках. Кроме того, очевидно, что $F(a) = F(b)$. Тогда для $F(x)$ применима теорема Ролля: найдется такая $\xi \in [a, b]$, что $F'(\xi) = 0$. Подставим и получим формулу Коши. ■

Пусть множество $C_\delta = \dot{B}_\delta(a)$ и ф-ции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы на множестве C_δ , кроме того, производная $g'(x)$ не обращается в нуль.

I правило Лопиталя^{0/0}.

Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$. Тогда если $\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то $\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Доказательство: Пусть $\{x_n\} \rightarrow a, x_n \neq a$. Доопределим $f(a) = g(a) = 0$. Тогда $f(x), g(x)$ будут непрерывны всюду на $\dot{B}_\delta(a)$.

Рассмотрим $x \in [a, x_n]$. Здесь ф-ции непрерывны и диф-мы, $g'(x) \neq 0$, а значит имеем право применить т. Коши (учитываем, что $f(a) = g(a) = 0$). Тогда $\exists \xi \in [a, x_n]$, т.ч. $f(x_n)/g(x_n) = f'(\xi_n)/g'(\xi_n)$.

Пусть $n \rightarrow \infty \Rightarrow x_n \rightarrow a$. Т.к. $\xi \in [a, x_n]$, то по т. Б.-В. $\xi_n \rightarrow a$. В силу существования предела отношения производных (по условию) и определению предела ф-ции по Гейне правая часть выражения имеет предел при $n \rightarrow \infty$, значит тот же самый предел имеет и левая часть. В силу существования предела левой части, предельный $f(x_n)/g(x_n)$ и $f'(x_n)/g'(x_n)$ равны. ■

II правило Лопиталя ^{∞/∞} .

Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$. Тогда если $\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то $\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Доказательство: Предположим, что $\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b$.

Пусть $\{x_n\} \rightarrow a$ либо справа ($x_n > a$), либо слева ($x_n < a$). Т.к. $\forall x_n \in C_\delta$ выполнены все условия теоремы Коши для точки $\xi_{mn} \in [x_m, x_n]$. Заключаем,

$$\text{что } \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(\xi_{mn})}{g'(\xi_{mn})} \times \frac{1-g(x_m)/g(x_n)}{1-f(x_m)/f(x_n)}.$$

Фиксируем $\varepsilon > 0$. Так как по условию $\lim_{x \rightarrow a} f'(x)/g'(x) = b$, а $x_n \rightarrow a$, то для $\varepsilon/2$ с некоторого номера $n > m$ будет выполняться:

$$\frac{f'(\xi_{mn})}{g'(\xi_{mn})} = b + \alpha_{mn}, \text{ где } m \text{ — фиксировано, } |\alpha_{mn}| < \varepsilon/2.$$

Из условий вначале $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-g(x_m)/g(x_n)}{1-f(x_m)/f(x_n)} = 1$. Это

значит, что для $q = \frac{\varepsilon/2}{|b|+\varepsilon/2} > 0$, m и $\exists n_0 \geq m$, т.ч.

$$\forall n \geq n_0: \frac{1-g(x_m)/g(x_n)}{1-f(x_m)/f(x_n)} = 1 + \beta_{mn}, \text{ где } \beta_{mn} < q.$$

Из соотношений выше: $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = b + (b + \alpha_{mn})\beta_{mn} + \alpha_{mn}$.

Переносим b в левую часть и все ставим под модули (получаем нер-во), куда подставляем α_{mn} и β_{mn} . Получим предел равный b в формулировке по Коши для ε . Доказано для конечного предела. Далее, если

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty, \text{ то } \lim_{x \rightarrow a} \frac{g'(x)}{f'(x)} = 0 \text{ и по I правилу}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = 0, \text{ а значит } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty. \blacksquare$$

Замечание. Обе теоремы справедливы, если

- 1) $C_\delta = (a, a + \delta), x \rightarrow a + 0$;
- 2) $C_\delta = (-\infty, -\delta) \cup (\delta, +\infty), x \rightarrow \infty$ - замена $x = 1/t$,
 $F(t) = f(1/t), \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F'(t)}{G'(t)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$
- 3) $C_\delta = (\delta, +\infty), x \rightarrow +\infty$ - замена $x = 1/t, t \rightarrow 0 + 0$

Неопределенности вида $1^\infty, 0^\infty, \infty^0$ сводятся к $0/0, \infty/\infty$. Они имеют общий вид $y = f(x)^{g(x)}$, где при $x \rightarrow a$, $f \rightarrow 1, 0$ или ∞ , $g \rightarrow 0$ или ∞ . Логарифмируем y и получаем неопределенность вида $\infty \cdot 0$. Переносим всё, что стремится к бесконечности, в знаменатель, получаем неопределенность вида $0/0$, которую можно расписать по I правилу Лопиталя.

Теорема Тейлора. Пусть ф-ция имеет в некоторой окрестности точки a производную порядка $n + 1$. Пусть, далее, x — любое значение аргумента из указанной окрестности, p — произвольное положительное число. Тогда между точками a и x найдется точка ξ , т.ч. справедлива следующая формула:

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a)^1 + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x),$$

где $R_{n+1}(x) = \left(\frac{x-a}{x-\xi}\right)^p \frac{(x-\xi)^{n+1}}{n!p} f^{(n+1)}(\xi)$ — остаточный член в общей форме.

Доказательство: обозначим символом $\varphi(x, n)$ многочлен относительно x порядка n , фигурирующий в правой части формулы Тейлора. Далее, обозначим символом $R_{n+1}(x) = f(x) - \varphi(x, n)$. Теорема будет доказана, если мы установим, что $R_{n+1}(x)$ определяется формулой остаточного члена; фиксируем любое значение x из окрестности, указанной в формулировке теоремы (пусть $x > a$). Пусть некоторая $t \in [a, x]$, рассмотрим вспомогательную функцию $\psi(t)$ вида $\psi(t) = f(x) - \varphi(x, t) - (x-t)^p Q(x)$, где $Q(x) = \frac{R_{n+1}}{(x-a)^p}$.

Ф-ция ψ непрерывна на сегменте $[a, x]$ и дифференцируема во всех внутренних точках сегмента (из условия $\exists f^{(n+1)}$). Кроме того, $\psi(a) = \psi(x) = 0$. Значит, можно применить теорему Ролля $\Leftrightarrow$ внутри сегмента $[a, x]$ найдется точка ξ , т.ч.

$$\psi'(\xi) = 0. \quad \psi'(t) = -f'(t) + \frac{f'(t)}{1!} - \frac{f^{(2)}(t)}{1!}(x-t) + \dots - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + p(x-t)^{p-1}Q(x).$$

Все члены справа, кроме последних двух, взаимоуничтожаются:

$$\psi'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + p(x-t)^{p-1}Q(x).$$

Полагая $t = \xi$ и учитывая, что $\psi'(\xi) = 0$, получаем выражение для $Q(x)$. Отсюда получаем $R_{n+1}(x)$. ■

Замечание. Многочлен φ обладает следующим свойством: $\varphi^{(n)}(a, a) = f^{(n)}(a)$.

Поскольку ξ лежит между a и x , найдется такое $0 < \theta < 1$, что $\xi - a = \theta(x - a)$, при этом $x - \xi = (x - a)(1 - \theta)$. Таким образом:

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-a)^{n+1}(1-\theta)^{n-p+1}}{n!p} f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)]$$

$p = n + 1$: остаточный член в форме Лагранжа:

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)]$$

$p = 1$: остаточный член в форме Коши:

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-a)^{n+1}(1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)]$$

Если нас интересует лишь порядок относительно малой $(x - a)$ ошибки, удобна т.н. форма Пеано.

Предположим $f(x)$ имеет $(n - 1)$ производную в $B(a)$ и n производную в самой точке a . Положим $R_{(n+1)}(x) = f(x) - \varphi(x, a)$. Докажем, что справедливо представление $R_{(n+1)}(x) = o[(x - a)^n]$.

Доказательство: Т.к. $\varphi(x, a)$ и $f(x)$ совпадают, имеем $R_{n+1}^{(0)}(a) = 0, R_{n+1}^{(1)}(a) = 0, \dots, R_{n+1}^{(n)}(a)$. Требуется д-ть, что $\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_{n+1}(x)}{(x-a)^n} = 0$.

Так как $R_{n+1}(x)$ и $(x - a)^n$ диф-мы $(n - 1)$ раз в некоторой окрестности точки a , то справедливы равенства выше и любая $(x - a)^n$ обращается в нуль только в точке a .

Применим последовательно $(n - 1)$ раз правило

Лопиталья: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_{n+1}(x)}{(x-a)^n} = \dots = \lim_{x \rightarrow a} \frac{R_{n+1}^{(n-1)}(x)}{n!(x-a)^{n-1}} = \frac{1}{n!} \lim_{x \rightarrow a} \frac{R_{n+1}^{(n-1)}(x) - R_{n+1}^{(n-1)}(a)}{x-a}$. В силу $\exists R_{n+1}^{(n)}(x)$ равенство доказано. ■

Оценка остаточного члена.

Пусть, для $f(x) \exists M \in \mathbb{R}, \forall n$ и $\forall x \in B_\delta(0)$: $|f^{(n)}(x)| \leq M$ -ф-ция, совокупность всех производных которой ограничена в окрестности $x = 0$.

По Лагранжу имеем $|R_{n+1}(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} |f^{(n+1)}(\theta x)| \leq M \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ - универсальная оценка. Выбирая $n \gg$ можем сделать правую часть как угодно малой.

Формулой Маклорена принято называть формулу Тейлора с центром в точке $a = 0$.

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1}(x)$$

Остаточный член в форме Лагранжа:

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)]$$

Остаточный член в форме Коши:

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-a)^{n+1}(1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)]$$

Разложение некоторых элементарных ф-ций:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}(x) < \frac{r^{n+1}}{(n+1)!} e^r$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{n+1}(x) < \frac{r^{n+2}}{(n+2)!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + R_{n+2}(x) < \frac{r^{n+2}}{(n+2)!}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + R_{n+1}(x) < \frac{1}{n+1}$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \dots + \frac{m \dots (m-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + R_{n+1}(x) < \frac{r^{n+2}}{(n+2)!}$$

Приближенные вычисления:

Положив для e^x $x = r = 1$, $|R_{n+1}(x)| \leq \frac{3}{(n+1)!} < eps$.

Выбирая $n \gg$ можем вычислить e с любой наперед заданной точностью eps .

Выбирая в $\sin x$ окрестность $r = \frac{\pi}{4}$, точность $\varepsilon = 10^{-4}$

имеем $|R_{n+2}(x)| \leq \frac{(\pi/4)^n}{n!} < 10^{-4}$, откуда $n+2 = 7$.

Функция $F(x)$ называется первообразной для ф-ции $f(x)$ на интервале (a, b) , если в $\forall x \in (a, b)$ ф-ция $F(x)$ дифф-ма и имеет производную $F'(x)$, равную $f(x)$.

Теорема. Две любые первообразные для одной ф-ции могут отличаться лишь на постоянную.

Следствие. Если $F(x)$ – одна из первообразных $f(x)$, то любая первообразная $\Phi(x)$ для $f(x)$ имеет вид $\Phi(x) = F(x) + C$.

Совокупность всех первообразных ф-ций для данной ф-ции $f(x)$ на интервале (a, b) называется неопределенным интегралом от ф-ции $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)dx$.

Основные свойства:

- 1) $d \int f(x)dx = f(x)dx$
- 2) $\int dF(x)dx = F(x) + C$
- 3) $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x) \pm \int g(x)$ (линейные)
- 4) $\int [Af(x)]dx = A \int f(x), A = const$

Таблица основных неопределенных интегралов:

$$\int 0 \cdot dx = C$$

$$\int 1 \cdot dx = x + C$$

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C \\ -\operatorname{arctg} x + C \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm 1} \right| + C$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C$$

$$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$$

$$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$$

Замена переменной.

Пусть $f(x)$ определена и дифф-ма на мн-ве $\{x\}$ и пусть $\{t\}$ - множество всех значений этой ф-ции. Пусть для $g(t)$ существует на мн-ве $\{t\}$ первообразная ф-ция $G(t)$. Тогда всюду на мн-ве $\{x\}$ для ф-ции $g[\varphi(x)]\varphi'(x)$ существует первообразная ф-ция, равная $G[\varphi(t)]$.

Доказывается дифференцированием.

Интегрированием путем замены переменной называется выделение такой ф-ции $t = \varphi(x)$, что $f(x) = g[\varphi(x)]\varphi'(x)$.

Примеры:

$$\int e^{\cos x} \sin x \, dx = -\int e^t \, dt = -e^{\cos x} + C$$

$$\int \frac{x^5 dx}{(3x)^{12} + 1} = \{t = (3x)^6, dt = 4375x^5 dx\} = \frac{1}{4375} \int \frac{dt}{t^2 + 1}$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x \, dx}{1 - \sin^2 x} = \{t = \sin x, dt = \cos x dx\} = \int \frac{dt}{1 - t^2}$$

Интегрирование по частям.

Теорема. Пусть каждая из ф-ций $u(x)$ и $v(x)$ диф-ма на $\{x\}$ и на этом множестве существует первообразная для ф-ции $v(x)u'(x)$. Тогда на мн-ве $\{x\}$ существует первообразная и для ф-ции $u(x)v'(x)$, причем справедлива формула: $\int u \, dv = uv - \int v \, du$.

Доказательство. Имеем $[uv]' = uv' + u'v$. Умножим обе части на dx и проинтегрируем. Т.к. для $\forall x \in \{x\}$ $\exists \int v u' dx$ и $\int (uv)' dx = uv + C$, то существует и интеграл $\int u v' dx$. ■

Примеры:

$$\int x^n \ln x \, dx = \{u = \ln x, dv = x^n dx \rightarrow du = \frac{dx}{x}, v = \frac{x^{n+1}}{n+1}\}$$

$$\int x \arctg x \, dx = \{u = \arctg x, dv = x dx\}$$

$$I = \int e^{ax} \cos bx \, dx = \{u = e^{ax}, dv = \cos bx\} = K_1 -$$

$$K_2 \int e^{ax} \sin bx \, dx = \{u = e^{ax}, dv = \sin bx dx\} = K_3 - K_4 I - \text{линейное уравнение.}$$

Можно выделить три группы:

I. $\ln \varphi(x), \arccos \varphi + df$. Взять $u(x) = \ln \varphi(x), \arccos \varphi$.

II. $\int (ax + b)^n \cos cx, \sin cx, e^{cx}$. Берутся путем n-кратного применения формулы по частям, где $u(x) = (ax + b)^m$.

III. $\int e^{ax} \sin bx, \cos bx; \int \sin, \cos (\ln x) \dots$ Путем двукратного интегрирования по частям составим для I уравнение первого порядка.

Рациональной дробью называется отношение двух алгебраических многочленов. (Правильная, если степень многочлена в числителе меньше степени многочлена в знаменателе, иначе – не правильная).

Лемма 1. Пусть $\frac{P(x)}{Q(x)}$ – ПРД с вещкф, знаменатель $Q(x)$ имеет $a \in \mathbb{R}$ корнем кратности α . Тогда справедливо:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{\xi(x)}{(x-a)^{\alpha-k}\varphi(x)}$$

Теорема. Пусть зн. рац. дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ с вещкф имеет вид:

$Q(x) = (x - b_1)^{\beta_1} \dots (x - b_m)^{\beta_m} (x^2 + p_1x + q_1)^\lambda \dots (x^2 + p_nx + q_n)^{\lambda_n}$
 Тогда для этой дроби справедливо большое-большое разложение.

Метод неопределенных коэффициентов:

Форму разложения дроби P/Q пишут с буквенными кф в числителях справа. Приходим к равенству двух многочленов $n - 1$ степени. Получаем СЛАУ с кф.

Метод вычеркиваний:

Пусть знаменатель $Q(x)$ правильной рац. дроби имеет $a \in \mathbb{R}$ корнем кратности α . По лемме I среди простейших дробей будет фигурировать дробь $\frac{A}{(x-a)^\alpha}$.

Тогда для вычисления кф. A следует вычеркнуть в знаменателе $Q(x)$ скобку $(x-a)^\alpha$ и в оставшемся выражении положить $x = a$.

Проблема интегрирования правильной рац. дроби сводится к интегрированию простейших дробей:

$$\text{I. } \int \frac{B}{x-b} \text{ II. } \int \frac{B}{(x-b)^\beta} \text{ III. } \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} \text{ IV. } \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\lambda}$$

Дроби вида I и II берутся подстановками $t = x - b$.

Для случая III представляем квадратный трехчлен в виде $x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)$. Введем $a = \sqrt{q - p^2/4}$. Применяя подстановку $t = x + \frac{p}{2}$, получаем: $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} = \frac{M}{2} \int \frac{2t dt}{t^2+a^2} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dt}{t^2+a^2}$.

Применяя к случаю IV выше введенные обозначения t и a , будем иметь: $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\lambda} = \frac{M}{2} \int \frac{2t dt}{(t^2+a^2)^\lambda} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^\lambda}$. Введем $I = \int \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^\lambda}$, $K_\lambda = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^\lambda}$. Интеграл I берется по таблице, а для K_λ можно установить рекуррентную формулу: $K_\lambda = \frac{1}{a^2} \int \frac{a^2 dt}{(t^2+a^2)^\lambda} =$

$$\frac{1}{a^2} \int \frac{(t^2+a^2-t^2)dt}{(t^2+a^2)^\lambda} = \frac{1}{a^2} K_{\lambda-1} - \frac{1}{2a^2} \int t \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^\lambda} =$$

$$\{2\text{й по частям, } u = t\} = \frac{t}{2a^2(\lambda-1)(t^2+a^2)^{\lambda-1}} + \frac{2\lambda-3}{a^2(2\lambda-2)} K_{\lambda-1}$$

Дробно-линейные иррациональности $R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$

Рационализируются подстановкой ($ad - bc \neq 0$)
 $t = \sqrt[n]{(ax+b)/(cx+d)}, x = \frac{dt^n - b}{a - ct^n}, dx = \frac{(ad-bc)nt^{n-1}}{(a-ct^n)^2} dt.$

Квадратичные иррациональности $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$

Рационализируются подстановками Эйлера:

$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \mp x\sqrt{a}$ - I подстановка ($a > 0$)

Возведя в квадрат и выражая x получаем: $x = \frac{t^2 - c}{2t\sqrt{a+b}},$

$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{t^2\sqrt{a} + bt + c\sqrt{a}}{2t\sqrt{a+b}}, dx = 2 \frac{t^2\sqrt{a} + bt + c\sqrt{a}}{(2t\sqrt{a+b})^2} dt.$

$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c}$ - II подстановка ($c > 0$)

Получаем: $x = \frac{2t\sqrt{c} - b}{a - t^2}, \sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{t^2\sqrt{c} - bt + a\sqrt{c}}{a - t^2} t,$

$dx = 2 \frac{t^2\sqrt{c} - bt + a\sqrt{c}}{(a - t^2)^2} dt.$

$t = \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{x - x_1}$ - III подстановка ($x_1 \neq x_2$)

$x = \frac{-ax^2 + x_1 t}{t^2 - a}, \sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{a(x_1 - x_2)}{t^2 - a} t, dx = \frac{2a(x_2 - x_1)t}{(t^2 - a)^2} dt.$

Тригонометрические выражения $R(\sin x, \cos x)$

Рационализируется подстановкой $t = tg \frac{x}{2}$:

$\sin x = \frac{2tg \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - tg^2 \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2},$

$x = 2 \arctan t, \quad dx = \frac{2dt}{1 + t^2}$

$$\int \sin^m x \cos^n x dx$$

Если $m, n \in \mathbb{Q}$ подстановка $z = \sin^2 x$.

Если $m, n \in \mathbb{R}$:

1) $m(n)$ - нечетный, $t = \sin x, \cos x$

2) m, n - (не)четные, $t = tg x, ctg x$

3) $m, n > 0$ - четные, используя формулы

$\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}, \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$

приводим к $\sin^{2\mu} x \cos^{2(v-\mu)} x$

($m = 2v, n = 2\mu, m \geq n$)

Список билетов

1. Вещественные числа и правила их сравнения. Теорема о существовании ТВГ (ТНГ) у ограниченного сверху (<i>снизу</i>) множества вещественных чисел	3
2. Приближение вещественного чисел рациональным. Арифметические операции над вещественными числами. Свойства вещественных чисел.....	4
3. Счетные множества и множества мощности континуум. Неэквивалентность счетного множества множеству мощности континуум	5
4. Ограниченные и неограниченные последовательности. Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности.....	6
5. Понятие сходящейся последовательности (СП). Единственность предела, ограниченность СП, арифметические операции над СП.....	7
6. Предельный переход в неравенствах. Теорема о пределе монотонной ограниченной последовательности. Число e	8
7. Понятие предельной точки посл-ти. Теорема о существовании верхнего и нижнего предела у ограниченной посл-ти. Теорема Больцано-Вейерштрасса.....	9
8. Необходимое и достаточное условие сходимости последовательности (критерий Коши) - фундаментальность	10
9. Определения предельного значения ф-ции (по Гёйне и по Коши) и доказательство их эквивалентности. Критерий Коши существования предела функции.....	11
10. Арифметические операции над функциями, имеющими предельное значение. БМ и ББ ф-ции и принципы их сравнения. Предельный переход в неравенствах. Предел сложной ф-ции.	12
11. Понятие непрерывности функции в точке и на множестве. Арифметические операции над непрерывными функциями. Классификация точек разрыва	13
12. Локальные свойства непрерывных функций. Непрерывность сложной функции	14
13. Обратная функция. Условия непрерывности монотонных функций и обратных функций	15
14. Простейшие элементарные функции и их основные свойства	16
15. Замечательные пределы. Предельный переход в неравенствах	17
16. Прохождение непрерывной функции через любое промежуточное значение	18
17. Ограниченность функции, непрерывной на сегменте (первая теорема Вейерштрасса)	19
18. О достижении функцией, непрерывной на сегменте, своих точной верхней и нижней граней (вторая теорема Вейерштрасса)	20
19. Понятие равномерной непрерывности. Теорема Кантора	21
20. Понятие производной и дифференцируемости функции в точке	22
21. Правила диф-я суммы, произведения и частного, сложной и обратной ф-ции. Формулы диф-я простейших элементарных ф-ций.....	23
22. Первый дифференциал ф-ции. Инвариантность его формы. Использование дифференциала для приближенного вычисления приращения ф-ции.....	24
23. Производные и дифференциалы высших порядков, формула Лейбница. Дифференцирование функции, заданной параметрически	25
24. Понятие возрастания в точке и локального экстремума функции. Достаточное условие возрастания и необходимое условие экстремума в точке	26
25. Теорема о нуле производной (теорема Ролля) и ее геометрический смысл	27
26. Формула конечных приращений (теорема Лагранжа). Следствия теоремы Лагранжа	28
27. Обобщенная формула конечных приращений (формула Коши)	29
28. Раскрытие неопределенностей (правила Лопиталья)	30
29. Формула Тейлора с остаточным членом в общей форме (в форме Шлемильха-Роша).....	31
30. Остаточный член в формуле Тейлора в форме Лагранжа, Коши и Пеано. Его оценка.....	32
31. Разложение по ф-ле Тейлора-Маклорена элементарных функций. Примеры приложений ф-лы Тейлора для $\approx$ вычислений элементарных ф-ций и пределов	33
32. Понятие первообразной и неопределенного интеграла функции. Простейшие свойства неопределенного интеграла. Таблица неопределенных интегралов	34
33. Простейшие методы интегрирования (замена переменной, интегрирование по частям).....	35
34. Интегрируемость в элементарных ф-циях класса рациональных дробей (с вещественными коэффициентами)	36
35. Интегрируемость в элементарных ф-циях дробно-линейных иррациональностей и других классов ф-ций	37